## Určení směrnice tečny ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $x_0$.

Směrnici $k_t$ tečny $t$ (tedy $\operatorname{tg}\varphi$) můžeme vyjádřit jako limitu

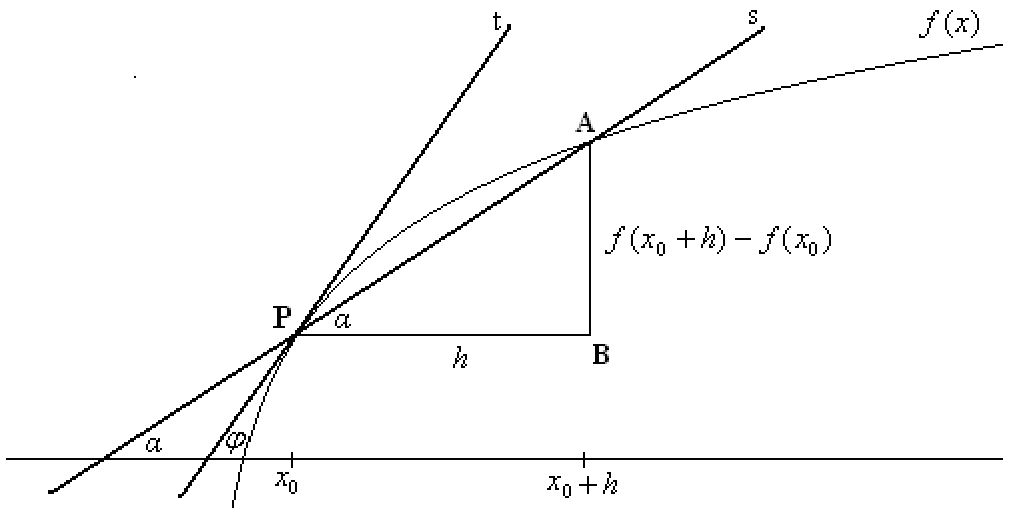
$$k_t = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Z teorie víte, že to je derivace $f'(x_0)$.

Připomeňme, že tečnu $t$ můžeme považovat za limitní případ sečny $s$, pokud se bod $A$ bude neomezeně blížit k bodu $P$ po grafu funkce $y = f(x)$.

Jestliže označíme $h = x - x_0$, můžeme vztah pro směrnici napsat v podobném (stejně často používaném) značení

$$k_t = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$




**Geometrický význam derivace**

Derivace $f'(x_0)$ tedy vyjadřuje směrnici $k = \operatorname{tg}\varphi$ tečny $t$, sestrojené ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $P = [x_0, f(x_0)]$.

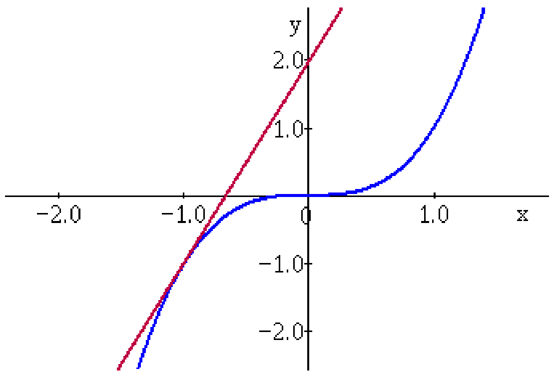
Tato tečna má rovnici : $y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$.

**Poznámka:** Normála je přímka, která prochází bodem $P$ kolmo k tečně $t$. Vzhledem k tomu, že pro směrnice kolmých přímek tečny a normály platí $k_t \cdot k_n = -1$, má normála rovnici :

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0).$$

**Příklad :** Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = x^3$ v bodě $x_0 = -1$.

Je-li $x_0 = -1$, znamená to, že bod dotyku má souřadnice $[-1, f(-1)] = [-1, -1]$.
Dále musíme vypočítat směrnici tečny jako derivaci dané funkce v bodě $x_0 = -1$.
$y' = 3x^2$
$y'(-1) = 3(-1)^2 = 3$.
Rovnice tečny obecně $y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$
Po dosazení $y - (-1) = 3 \cdot (x - (-1))$




Po úpravě $y + 1 = 3x + 3$, tedy tečnou je přímka $y = 3x + 2$ (viz obrázek).

Rovnice normály $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

Dosadíme $y - (-1) = -\dfrac{1}{3} \cdot (x - (-1))$, po úpravě $y + 1 = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$, tedy $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{3}$.

**Příklad :** Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $y = 2x^2 + 4x - 1$ v bodě $x_0 = 1$.

Nejprve určíme druhou souřadnici bodu , ve kterém se tečna dotýká grafu funkce

$$f(1) = 2.1^2 + 4.1 - 1 = 5.$$

Směrnici tečny určíme jako derivaci dané funkce v bodě $x_0 = 1$.

$$y' = 4x + 4 \ ,$$

v zadaném bodě $y'(1) = 4 + 4 = 8$.

Po dosazení do rovnice tečny $y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$ je $y - 5 = 8.(x - 1)$ a po úpravě bude mít rovnice tečny tvar $8x - y - 3 = 0$.

Po dosazení do rovnice normály $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ dostaneme

$y - 5 = -\dfrac{1}{8} \cdot (x - 1)$, po úpravě bude mít rovnice normály tvar $x + 8y - 39 = 0$.